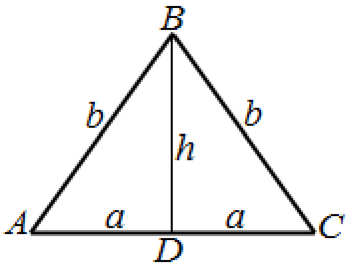
Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 24 см. При каком значении высоты площадь треугольника наибольшая?

а) 12 см б) 12√2 см в) 12√3 см г) 8√3 см



Решим задачу в общем виде. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = b$, $BD \perp AC$, $BD = h$ и $AD = DC = a$, т.к. высота BD – ещё и медиана. Площадь треугольника ABC: $S = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = ah$. По теореме Пифагора $a = \sqrt{b^2 - h^2}$, и $S(h) = h\sqrt{b^2 - h^2}$. Здесь b – постоянная, требуется найти значение h, при котором $S(h)$ принимает наибольшее значение. Т.к. $b > h$, то $S(h) > 0$, и при наибольшем значении функции $S(h)$ функция $G(H) = S^2(h) = b^2h^2 - h^4$ тоже будет принимать наибольшее значение. Т.к. $0 < h < b$, то наибольшее значение достигается в точке, в которой $G'(h) = 0$: $2b^2h - 4h^3 = 0 \Leftrightarrow h(b^2 - 2h^2) = 0$. И т.к. $h > 0$, то $2h^2 = b^2 \Rightarrow h = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. Убедимся, что при $h = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ достигается именно наибольшее значение. $G''(h) = 2b^2 - 12h^3$, $G''\left(\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right) = 2b^2 - 12 \cdot \dfrac{b^2 \cdot 2}{4} = -4b^2 < 0$, т.е. $h = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ – точка максимума. На конечном интервале (0; b) это единственная точка экстремума, и, значит, в ней достигается наибольшее значение функции $G(h)$ и, следовательно, $S(h)$.

Те, кто не знаком с производными, могут поступить так:

$$G(H) = b^2h^2 - h^4 = 2 \cdot \frac{1}{2}b^2h^2 - h^4 = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}b^4 + 2 \cdot \frac{1}{2}b^2h^2 - h^4 =$$
$$= \frac{1}{4}b^4 - \left(\frac{1}{2}b^2 - h^2\right)^2.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение $G(h)$ принимает, когда $\dfrac{1}{2}b^2 - h^2 = 0$ или $h^2 = \dfrac{1}{2}b^2 \Rightarrow h = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$.

При $b = 24$ см получаем $h = 12\sqrt{2}$ см, т.е. правильный ответ б) $h = 12\sqrt{2}$ см.