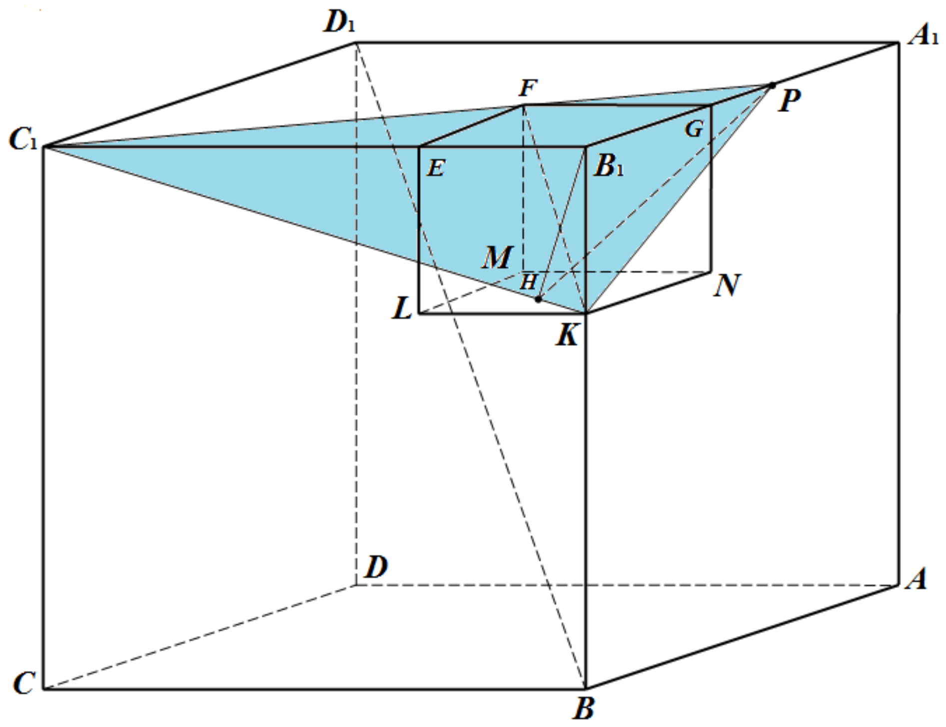
«Очень трудно найти в тёмной комнате чёрную кошку, особенно, если ее там нет.»

Конфуций.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=4. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1. A_1P:PB_1=3:1. P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1. Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.



Конечно же, в условии задачи не было дано, что $A_1P:PB_1=3:1$. Это ты установил в процессе решения. Но – ближе к делу! Обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую KC_1 и параллельную диагонали BD_1. Чтобы построить эту плоскость, надо провести прямую, проходящую через точку K или точку C_1, параллельную BD_1. Проще это сделать через точку K.

Для этого построим куб $KLMNB_1EFG$ с ребром $B_1K=1$, у которого вершины E и G лежат на рёбрах B_1C_1 и B_1A_1 соответственно, а L и F – на гранях BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$, и проведём в нём диагональ KF, которая и будет параллельна диагонали BD_1 (куб можно было не строить, достаточно отложить на рёбрах B_1C_1 и $B_1K=BB_1-BK=5-4=1$ отрезки $B_1E=B_1G=B_1K=BB_1-BK=5-4=1$, через точки E и G провести прямые, параллельные B_1A_1 и B_1C_1 и их точку пересечения F соединить с точкой K, но мне кажется, что с кубом – нагляднее). Т.к. плоскость KC_1F содержит прямую KF, параллельную BD_1, то это и есть плоскость α. Достроим эту плоскость, для чего продолжим C_1F до пересечения с B_1A_1 в точке P и соединим точки P и K. Чтобы найти угол между плоскостью α и гранью BB_1C_1C, нужно, прежде всего, провести перпендикуляры к прямой KC_1 (к линии пересечения этих плоскостей) в плоскости α и в грани BB_1C_1C. В грани BB_1C_1C проведём $B_1H\perp KC_1$. Т.к. $PB_1\perp BB_1C_1C$, то B_1H – проекция PH на грань BB_1C_1C, и по теореме о трёх перпендикулярах $PH\perp KC_1$, т.е. искомый угол, это $\angle B_1PH$.

Т.к. $\Delta C_1B_1P\sim\Delta CEF$, то $\dfrac{B_1P}{EF}=\dfrac{C_1C}{CE}\Leftrightarrow\dfrac{B_1P}{1}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow B_1P=\dfrac{5}{4}$.

По теореме Пифагора $C_1K=\sqrt{B_1C_1^2+KB_1^2}=\sqrt{26}$, $B_1H=\dfrac{B_1C_1}{C_1K}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

Т.к. $PB_1 \perp BB_1C_1C$, то $B_1P \perp B_1H$ $\angle B_1PH = \operatorname{arctg}\dfrac{B_1P}{B_1H} = \dfrac{5}{4} : \dfrac{5}{\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{26}}{4}$.