

1. Прямая, проходящая через вершину P треугольника PQR перпендикулярно биссектрисе его угла Q , пересекает прямую QR в точке A . Прямая, проходящая через вершину R перпендикулярно той же самой биссектрисе, пересекает прямую PQ в точке C . Найдите QR , если $PQ = 6$, $AR = 2$.

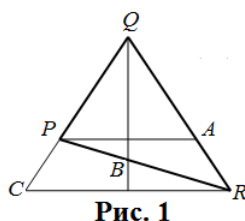


Рис. 1

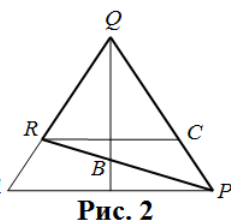


Рис. 2

Т.к. AP и CR – перпендикуляры к биссектрисе QB , то треугольники PQA и CQR – равнобедренные: $AQ = PQ = 6$, $CQ = RQ$.

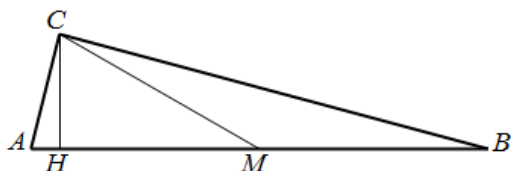
Случай 1. (рис. 1) PA пересекает QR , а RC – продолжение QP . $QR = AQ + AR = 6 + 2 = 8$.

Случай 1. (рис. 1) PA пересекает продолжение QR , а RC – QP .

$$QR = AQ - AR = 6 - 2 = 4.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC угол B равен 15° . Из вершины прямого угла C проведены высота CH и медиана CM .

Найдите отношения $CH : AB$ и $MH : BC$.



Середина гипотенузы прямоугольного треугольника (точка M медианы CM) – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Поэтому $MA = MC = MB$, и $\triangle BMC$ – равнобедренный, $\angle MCB = \angle MBC = 15^\circ$.

$\angle HMC$ – внешний угол треугольника MBC , и равен сумме углов MCB и MBC , т.е. $\angle HMC = 30^\circ$. Т.к. $MA = MC$, то $CH : MA = CH : CM = 1 : 2$. А т.к. $AB = 2MA$, то $CH : AB = CH : 2MA = 1 : 4$.

Обозначим $CH = h$. Тогда $MA = MC = 2h$, $AB = 4h$. По теореме Пифагора $MH^2 + CH^2 = MC^2 \Leftrightarrow MH^2 + h^2 = 4h^2 \Leftrightarrow MH^2 = 3h^2 \Rightarrow MH = \sqrt{3}h$.

$BH = MB + MH = 2h + \sqrt{3}h = (2 + \sqrt{3})h$. Опять же по теореме Пифагора

$$BC^2 = CH^2 + BH^2 = h^2 + (4 + 4\sqrt{3} + 3)h^2 = (8 + 4\sqrt{3})h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}h = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}h.$$

$$\frac{MH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$