

Написать уравнение плоскости, симметричной координатной плоскости  $Oxz$  относительно плоскости, заданной уравнением  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ .

**Решение.** Уравнение координатной плоскости  $Oxz$  имеет вид  $y = 0$ , т.е. ей принадлежат точки  $(x; 0; z)$ .

Прямая, по которой пересекаются плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$  и  $y = 0$ , принадлежит также и плоскости, симметричной плоскости  $y = 0$  относительно плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ . Легко видеть, что этой прямой, общей для всех 3-х плоскостей, принадлежат точки  $A(0; 0; -1)$  и  $B(-5; 0; 2)$ :  $0 \cdot 0 + 0 + 0 \cdot (-1) = 0$ ,  $0 \cdot (-5) + 0 + 0 \cdot 2 = 0$ ;  $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 5 = 0$ ,  $3 \cdot (-5) - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 5 = 0$ .

Чтобы составить уравнение плоскости, удовлетворяющей условию задачи, нужно найти ещё одну точку этой плоскости, не лежащую на одной прямой с точками  $A$  и  $B$ . Для этого выберем в плоскости  $y = 0$  какую-нибудь точку, не принадлежащую плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ , составим уравнение прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ , и найдём точку пересечения этой прямой с плоскостью  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ . В качестве такой точки удобно взять точку  $O(0; 0; 0)$  – начало координат.

Нормальным вектором плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$  является вектор  $\vec{N}(3; -4; 5)$ , он же – направляющий вектор любой прямой, перпендикулярной плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ . Уравнение прямой, проходящей через точку  $O(0; 0; 0)$  перпендикулярно плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ :

$\frac{x}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{5}$ . Отсюда  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-4} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x$ ;

$\frac{x}{3} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow z = \frac{5}{3}x$ . Подставляя выражения  $y$  и  $z$  через  $x$  в уравнение плоскости

$3x - 4y + 5z + 5 = 0$ , получим:  $3x + \frac{16}{3}x + \frac{25}{3}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{50x}{3} = -5 \Leftrightarrow x = -0,3$ ;

$y = -\frac{4}{3}x$ ,  $y = 0,4$ ;  $z = \frac{5}{3}x$ ,  $z = -0,5$ . Убедимся, что точка  $C(-0,3; 0,4; -0,5)$  лежит в

плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ :  $3 \cdot (-0,3) - 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot (-0,5) + 5 = -0,9 - 1,6 - 2,5 + 5 = 0$ .

Точка  $D(-0,6; 0,8; 1)$  симметрична точке  $O(0; 0; 0)$  относительно точки  $C(-0,3; 0,4; -0,5)$ , и поэтому лежит в плоскости, симметричной плоскости  $y = 0$  относительно плоскости  $3x - 4y + 5z + 5 = 0$ . Уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z+1 \\ -3-0 & 0-0 & 2+1 \\ -0,6-0 & 0,8+0 & -1+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -0,6 & 0,8 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0,8 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -0,6 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -0,6 & 0,8 \end{vmatrix} (z+1) = 0;$$

$$-2,4x - 1,8y - 2,4(z+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 4z + 4 = 0.$$

Легко убедиться, что все 3 точки:  $A(0;0;-1)$ ,  $B(-5;0;2)$ ,  $D(-0,6;0,8;1)$  лежат в плоскости  $4x + 3y + 4z + 4 = 0$ .